第28卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 3
2011年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0300-07

不定二次规划全局求解的一个新算法*

汪春峰[1,2]， 刘三阳[1]， 张建科[1,3]

(1- 西安电子科技大学理学院，西安 710071;
2- 河南师范大学数学与信息科学学院，新乡 453007; 3- 西安邮电学院应用数理系，西安 710121)

摘　要: 针对工程设计、设施布局等领域出现的不定二次规划问题的求解，本文给出了一个新的全局优化算法. 首先根据二次函数的特点，利用线性松弛化技巧，建立不定二次规划问题的松弛线性规划问题；然后通过一系列松弛线性规划问题的解逐步逼近原问题的最优解. 理论上证明了算法的收敛性，数值算例表明算法是有效可行的.

关键词: 不定二次规划；全局优化；线性化松弛；分支定界

分类号: **AMS**(2000) 90C26; 90C30　　**中图分类号**: O221.2　　**文献标识码**: A

1　引言

本文考虑如下不定二次规划问题

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P})\quad \min\quad & f(x)=x^TQx+c^Tx\\
\text{s.t.}\quad & Ax\le b,\\
& x\in X^0=\big\{x\in R^n \mid 0\le \underline{x}\le x\le \overline{x}\big\},
\end{aligned}
$$

其中 $Q\in R^{n\times n}$ 是 n 阶实对称矩阵，$A\in R^{m\times n}$ 和 $b\in R^m$，$c,x\in R^n$.

二次规划在工程设计、经济学、统计学及设施布局等诸多领域有着广泛应用[1,2]，而且许多非线性规划问题可以转化为此类问题的求解，如整数线性规划、整数二次规划等，因此研究这类问题既具有理论意义，又具有实用价值. 对于凸二次规划的求解，已有很多成熟的算法[3,4]. 对于非凸二次规划，由于其为N-P难问题，所以求解起来较为不易. 近些年来，人们对非凸二次规划问题的求解也做了很多工作[5-8]. 本文利用二次函数自身的结构特点，构造了一个新的分支定界算法. 理论上证明了算法的收敛性，数值算例表明算法是切实可行的.

2　线性松弛规划

令 Q_i 表示 Q 的第 i 行，首先求解 $2n$ 个线性规划问题

$$
\begin{aligned}
l_i\quad \min\quad & Q_ix\\
\text{s.t.}\quad & Ax\le b,\\
& 0\le \underline{x}\le x\le \overline{x},
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
u_i\quad \max\quad & Q_ix\\
\text{s.t.}\quad & Ax\le b,\\
& 0\le \underline{x}\le x\le \overline{x}.
\end{aligned}
$$

收稿日期: 2009-08-27.　**作者简介**: 汪春峰 (1978年5月生)，男，博士，讲师. 研究方向：最优化理论方法及应用.
*__基金项目__: 国家自然科学基金 (60674108)；中央高校基本科研业务费专项资金 (K50510700004; JY10000970006).

并引进下面的指标集和符号

$$T_1=\{i\mid l_i>0,\ i=1,2,\cdots,n\},\quad T_2=\{i\mid u_i<0,\ i=1,2,\cdots,n\},$$
$$T_3=\{i\mid i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus(T_1\bigcup T_2)\},\quad \underline{z}_i=\ln(l_i),\quad \overline{z}_i=\ln(u_i),\quad i\in T_1,$$
$$\underline{z}_i=\ln(-u_i),\quad \overline{z}_i=\ln(-l_i),\quad i\in T_2,\quad \underline{z}_i=\exp(l_i),\quad \overline{z}_i=\exp(u_i),\quad i\in T_3.$$

由于 $x_i\geq 0$，所以问题 (P) 可等价地转化为如下问题

$$\begin{aligned}
\text{(EP)}\quad \min\quad & \varphi_0(x,z)=\sum_{i\in T_1}x_i\exp(z_i)+\sum_{i\in T_2}x_i\big[-\exp(z_i)\big]+\sum_{i\in T_3}x_i\ln(z_i)+c^Tx\\
\text{s.t.}\quad & \varphi_i(x,z)=Q_ix-\exp(z_i)\leq 0,\quad i\in T_1,\\
& \varphi_i(x,z)=Q_ix+\exp(z_i)\leq 0,\quad i\in T_2,\\
& \varphi_i(x,z)=Q_ix-\ln(z_i)\leq 0,\quad i\in T_3,\\
& Ax\leq b,\\
& x\in X^0=\{x\in R^n\mid 0\leq \underline{x}\leq x\leq \overline{x}\}.
\end{aligned}$$

由问题 (EP) 和 (P) 的结构，易证如下关于问题 (P) 与 (EP) 的等价性结论.

定理 1 若 (x^*,z^*) 是问题 (EP) 的最优解，则 x^* 是问题 (P) 的最优解；反之，若 x^* 是问题 (P) 的最优解，则 (x^*,z^*) 是问题 (EP) 的最优解，其中 $z^*=(z_1^*,z_2^*,\cdots,z_n^*)$，且

$$z_i^*=\ln(Q_ix^*),\ \ i\in T_1,\qquad z_i^*=\ln(-Q_ix^*),\ \ i\in T_2,\qquad z_i^*=\exp(Q_ix^*),\ \ i\in T_3.$$

根据定理 1，求解问题 (P) 可转化为其等价问题 (EP) 的求解，且问题 (P) 与 (EP) 的最优值相等．为了求解等价问题 (EP)，本文给出一个分支定界算法，为此需要构造 (EP) 的松弛线性规划问题，其最优值为问题 (EP) 的最优值的下界.

下面给出 (EP) 的松弛线性规划问题的构造过程．不失一般性，令 $X=[\underline{x},\overline{x}]\subseteq X^0$ 表示初始矩形或由算法产生的子矩形．因 $x_i\geq \underline{x}_i\geq 0$，所以可构造问题 (EP) 在矩形 X 上的松弛线性规划问题如下

$$\begin{aligned}
\text{(RLP)}\quad \min\quad & \varphi_0^l(x,z)=\sum_{i\in T_1}x_i\exp(\underline{z}_i)+\sum_{i\in T_2}x_i\big[-\exp(\overline{z}_i)\big]+\sum_{i\in T_3}x_i\ln(\underline{z}_i)+c^Tx\\
\text{s.t.}\quad & \varphi_i^l(x,z)=Q_ix-\exp(\overline{z}_i)\leq 0,\quad i\in T_1,\\
& \varphi_i^l(x,z)=Q_ix+\exp(\underline{z}_i)\leq 0,\quad i\in T_2,\\
& \varphi_i^l(x,z)=Q_ix-\ln(\overline{z}_i)\leq 0,\quad i\in T_3,\\
& Ax\leq b,\\
& x\in X=\{x\in R^n\mid 0\leq \underline{x}\leq x\leq \overline{x}\}.
\end{aligned}$$

若令 $v[(\text{P})]$ 表示问题 (P) 的最优值，显然有 $v[(\text{EP})]\geq v[(\text{RLP})]$.

定理 2 随着 $\|\overline{x}-\underline{x}\|\to 0$，有 $\varphi_0(x,z)-\varphi_0^l(x,z)\to 0$，$\varphi_i(x,z)-\varphi_i^l(x,z)\to 0$，$i\in T_1$，或 $i\in T_2$，或 $i\in T_3$.

证明 当 $\|\overline{x}-\underline{x}\|\to 0$ 时，根据 z_i 的定义，显然有 $\overline{z}_i-\underline{z}_i\to 0$，所以

$$\varphi_0(x,z)-\varphi_0^l(x,z) = \sum_{i\in T_1} x_i\big(\exp(z_i)-\exp(\underline{z}_i)\big)+\sum_{i\in T_2} x_i\big(\exp(\overline{z}_i)-\exp(z_i)\big) + \sum_{i\in T_3} x_i\big(\ln(z_i)-\ln(\underline{z}_i)\big)\to 0.$$

类似可证，$\varphi_i(x,z)-\varphi_i^l(x,z)\to 0$, $i\in T_1$，或 $i\in T_2$，或 $i\in T_3$ 成立.

定理2说明，随着分支过程的进行，$\varphi_i^l(x,z)$ 可以任意逼近 $\varphi_i(x,z)$.

3 全局优化算法

本节给出求解问题(EP)的全局优化算法. 在算法中，通过求解一系列线性规划问题(RLP)，逐步改进(EP)的最优目标函数值的上下界，最终确定出原问题的全局最优解. 假定在算法进行的第 k 次迭代中，G_k 表示由活动节点(即可能存在全局最优解的子长方体)构成的集合. 对每一个节点 $X\in G_k$，求解线性规划问题RLP (X) 得最优值 $LB(X)=V[\mathrm{RLP}(X)]$，而(EP)的全局最优值的下界为 $LB_k=\min\{LB(X),\forall\ X\in G_k\}$. 对任意的 $X\in G_k$，由RLP (X) 的最优解可构造出(EP)的一个新的可行解(构造方法参看算法)，进而可检查是否需要修正(EP)的上界. 选定一个具有最小下界的活动节点，然后将其分成两部分，对每个新的节点求其相应的解，重复这一过程直到满足收敛条件为止.

在算法中，对于矩形节点 X 的剖分，我们采用对分规则:

(i) 令 $j=\mathrm{argmax}\{\overline{x}_i-\underline{x}_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$;

(ii) 令 $\gamma_j=\frac{1}{2}(\underline{x}_j+\overline{x}_j)$;

(iii) $X^1=\{x\in R^n\mid \underline{x}_i\le x_i\le\overline{x}_i,\ i\ne j,\ \underline{x}_j\le x_j\le\gamma_j\}$, $X^2=\{x\in R^n\mid \underline{x}_i\le x_i\le\overline{x}_i,\ i\ne j,\ \gamma_j\le x_j\le\overline{x}_j\}$.

通过剖分可以得到两个子矩形 X^1 和 X^2，且 $\mathrm{int}X^1\bigcap\mathrm{int}X^2=\emptyset$, $X^1\bigcup X^2=X$.

算法描述

步0 选取 $\epsilon\ge 0$. 找出问题(RLP)在矩形 $X=X^0$ 上的最优解 x^0 和最优值 $LB(X^0)$. 令

$$z_i^0=\ln(Q_ix^0),\ \ i\in T_1,\qquad z_i^0=\ln(-Q_ix^0),\ \ i\in T_2,\qquad z_i^0=\exp(Q_ix^0),\ \ i\in T_3,$$

则 (x^0,z^0) 为问题(EP)的一可行解. 置

$$LB_0=LB(X^0),\quad UB_0=\varphi_0(x^0,z^0).$$

如果 $UB_0-LB_0\le\epsilon$，则停止计算. x^0 和 (x^0,z^0) 分别为是问题(P)和问题(EP)的 ϵ-最优解. 否则，令 $G_0=\{X^0\}$, $F=\emptyset$, $k=1$，转步**k**;

步k $k\ge 1$;

步k1 令 $UB_k=UB_{k-1}$. 利用上述分支规则将 X^{k-1} 剖分为两个子矩形 $X^{k,1}$, $X^{k,2}\subseteq R^n$. 令 $F=F\bigcup\{X^{k-1}\}$;

步k2 对于子矩形 $X^{k,1}$ 和 $X^{k,2}$，确定出问题(RLP)在 $X=X^{k,t}$ 上的最优值 $LB(X^{k,t})$ 及最优解 $x^{k,t}$ $(t=1,2)$. 令

$$z_i^{k,t}=\ln(Q_ix^{k,t}),\ \ i\in T_1,\qquad z_i^{k,t}=\ln(-Q_ix^{k,t}),\ \ i\in T_2,\qquad z_i^{k,t}=\exp(Q_ix^{k,t}),\ \ i\in T_3,$$

则 $(x^{k,t}, z^{k,t})$ 为问题 (EP) 的一可行解．修正下界

$$UB_k = \min\left\{UB_k,\ \varphi_0(x^{k,t}, z^{k,t})\right\},$$

并令 (x^k, z^k) 表示为满足 $UB_k = \varphi_0\,(x^k, z^k)$ 的点；

步 k3　如果 $LB(X^{k,t}) > UB_k\,(t = 1, 2)$，那么令 $F = F\bigcup\{X^{k,t}\}$；

步 k4　令

$$F = F\bigcup\left\{X \in G_{k-1} \mid LB(X) > UB_k\right\};$$

步 k5　令

$$G_k = \left\{X \mid X \in \left(G_{k-1}\bigcup\left\{X^{k,1}, X^{k,2}\right\}\right),\ X \notin F\right\}.$$

步 k6　令 $LB_k = \min\{LB(X) \mid X \in G_k\}$，并令 $X^k \in G_k$ 为满足 $LB_k = LB(X^k)$ 的子矩形．如果 $UB_k - LB_k \le \epsilon$，则停止计算．x^k 和 (x^k, z^k) 分别是问题 (P) 和问题 (EP) 的 ϵ-最优解．否则，令 $k = k + 1$，转步 **k**.

4　算法收敛性及应用

定理 3　假设问题 (EP) 存在最优解，则算法或者在有限步内得到问题 (EP) 的最优解，或者产生一无穷可行解序列 $\{(x^k, z^k)\}$，其聚点是问题 (EP) 的最优解．

证明　当算法有限步终止时，结论显然，下证算法迭代次数无限时的收敛性．

根据文献 [9] 知，一个算法收敛到问题的全局最优解的充分条件是界运算要求满足“consistent”特性及界选取要求满足“improving”特性．

所谓界运算 consistent 是指在每一步，任一未被删除的部分可被进一步剖分，且任一无限被剖分的部分满足

$$\lim_{k\to+\infty}(UB_k - LB_k) = 0, \tag{1}$$

其中 UB_k 是第 k 次迭代在某个子矩形上的上界，LB_k 是第 k 次迭代时的最好下界，LB_k, UB_k 不必同时出现在同一子矩形上．下面说明 (1) 成立．

因为算法中采用的矩形对分是穷举的，所以根据文献 [9] 知，(1) 成立，即算法中的界运算是 consistent.

界选取满足 improving 特性是指在有限次剖分后，至少有一个下界在其上达到的矩形被选出，作为进一步剖分的矩形．根据算法，在迭代中，作为进一步划分的矩形恰恰是下界在其上达到的矩形，因此界选取是 improving 的．

综上可知，本文给出的算法满足界运算是 consistent 的，且界选取是 improving 的，因此根据文献 [9] 中定理 IV.3. 知，该算法是全局收敛的．

为了验证本文方法的可行性，我们利用 Matlab 7.1 编程，做了一些数值实验．取 $\epsilon = 1.0e-3$，变量个数记为 n，算法运行时间以秒为单位．

例 1

$$\begin{aligned}
\min\quad & x^TQx + c^Tx\\
\text{s.t.}\quad & Ax \le b,\\
& x \in X^0 = \left\{0.4743 \le x_1 \le 5.8649,\ 0 \le x_2 \le 5.0279, 0 \le x_3 \le 2.5783\right\},
\end{aligned}$$

其中

$$c=(-0.992372\quad -0.046466\quad 0.891766)^T,$$

$$b=(2.865062\quad -1.491608\quad 0.519588\quad 1.584087\quad 2.198036\quad -1.301853\quad -0.738290)^T,$$

$$Q=\begin{pmatrix} 0.992934 & -0.640117 & 0.337286 \\ -0.640117 & -0.814622 & 0.960807 \\ 0.337286 & 0.960807 & 0.500874 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 0.488509 & 0.063565 & 0.945686 \\ -0.578592 & -0.324014 & -0.501754 \\ -0.719203 & 0.099562 & 0.445225 \\ -0.346896 & 0.637939 & -0.257623 \\ -0.202821 & 0.647361 & 0.920135 \\ -0.983091 & -0.886420 & -0.802444 \\ -0.305441 & -0.180123 & -0.515399 \end{pmatrix}.$$

最优解为 (5.2107 5.0279 0.0000)，最优值为 -32.5794，迭代 1 次，运行时间 0.401768 秒.

例 2

$$\begin{aligned} \min \quad & x^TQx+c^Tx \\ \text{s.t.} \quad & Ax\le b, \\ & x\in X^0=\{0\le x_1\le 2,\ 0\le x_2\le 2\}, \end{aligned}$$

其中

$$c=(2\ 4)^T,\quad b=(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3\ \ 1)^T,\quad Q=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

最优解为 (0.75 2)，最优值为 -1.0625，迭代 3 次，运行时间 0.310939 秒.

下面我们对两个大规模的标准非正定二次规划问题进行测试.

例 3

$$\begin{aligned} \min \quad & -\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+\frac{1}{2}x_i\right) \\ \text{s.t.} \quad & x\in X^0=\{0\le x_i\le 1,\ i=1,2,\cdots,n\}. \end{aligned}$$

例 3 是一个凹可分二次规划问题，表 1 给出了例 3 的测试结果.

表 1:　例 3 的测试结果

n	迭代次数	运行时间	最优值
30	1	0.852020	-45
50	1	1.628337	-75
80	1	3.098150	-120
100	1	4.270962	-150
150	1	8.128278	-225
200	1	13.375105	-300

例 4

$$\begin{aligned} \min \quad & -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{j} x_i \le j, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ & x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

例 4 的测试结果如表 2 所示.

表 2:　例 4 的测试结果

n	迭代次数	运行时间	最优值
30	1	1.320828	-900
50	1	3.592944	-2500
80	1	10.694849	-6400
100	1	20.450738	-10000
150	1	73.106514	-22500
200	1	193.654163	-40000

由以上数值算例可见，我们的算法是有效可行的.

参考文献:

[1] Horst R, Pardalos P M. Handbook of Global Optimization[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1975

[2] Pardalos P M, Rosen J B. Constrained Global Optimization: Algorithm and Applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987

[3] Goldfarb D, Liu S. An O(n^3L) primal interior point algorithm for convex quadratic programming[J]. Mahtematical Programming, 1991, 49: 325-340

[4] Monteiro R C, Adler I. Interior path following primal-dual algorithm II: convex quadratic programming[J]. Mahtematical Programming, 1989, 44: 43-46

[5] 吴慧卓，段东东，张可村. 一种新的求解带有非凸约束的非凸二次规划问题的加速全局优化方法[J]. 工程数学学报，2009, 26(1): 75-84
Wu H Z, Duan D D, Zhang K C. A new acceleration method for the global non-convex quadratic optimization with non-convex quadratic constraints[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(1): 75-84
[6] 申培萍，刘利敏. 带非凸约束的二次规划问题的全局优化方法[J]. 工程数学学报，2008, 25(5): 923-926
Shen P P, Liu L M. A global optimization approach for quadratic programs with nonconvex quadratic constraints[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(5): 923-926
[7] 高岳林，邓光智. 凹二次规划问题的一个融合割平面方法的分支定界算法[J]. 工程数学学报，2008, 25(4): 589-596
Gao Y L, Deng G Z. A branch and bound method mixed with cutting plane technique for solving concave quadratic programming problems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(4): 589-596
[8] 申培萍，裴永刚，顾敏娜. 求非凸二次规划全局最优解的分解线性化方法[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2008, 36(3): 128-130
Shen P P, Pei Y G, Gu M N. A decomposition and linearization method for globally solving nonconvex quadratic programming[J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition), 2008, 36(3): 128-130
[9] Horst R, Tuy H. Global Optimization: Deterministic Approaches[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993

A New Global Optimization Algorithm for Indefinite Quadratic Programs

WANG Chun-feng[1,2], LIU San-yang[1], ZHANG Jian-ke[1,3]

(1- School of Mathematical Sciences, Xidian University, Xi'an 710071;
2- Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang 453007; 3- Department of Mathematics and Physics, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121)

Abstract: A new global optimization algorithm is presented to solve indefinite quadratic programming problems which have been extensively used in engineering design and facilities layout etc. First, the linear relaxation programming problem of the indefinite quadratic programming problem is derived by utilizing the characteristics of the quadratic function and a linear relaxation technique; then, by means of the sequential solutions of a series of linear programming problems, the global optimal solution is obtained. The theoretical analysis and numerical experiment show that the presented algorithm is convergent and efficient.

Keywords: indefinite quadratic programming; global optimization; linearization relaxation; branch and bound

Received: 27 Aug 2009. **Accepted:** 21 Jan 2011.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60674108); the Fundamental Research Funds for Central Universities (K50510700004; JY10000970006).